**Sujet**

Soient $(S_n)$ et $(T_n)$ deux suites définies, pour tout entier naturel $n$, par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}$.

**1. a.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

**b.** En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

**2. a.** Montrer que la suite $(T_n)$ est croissante.

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $T_{n+1} = \frac{S_n + T_n}{3}$.

**c.** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $T_n \leqslant 1$.

**d.** En déduire que la suite $(T_n)$ converge vers un réel $\ell$.

**e.** On admet que $\ell$ vérifie $\ell = \frac{\ell + \frac{3}{2}}{3}$. Déterminer $\ell$.